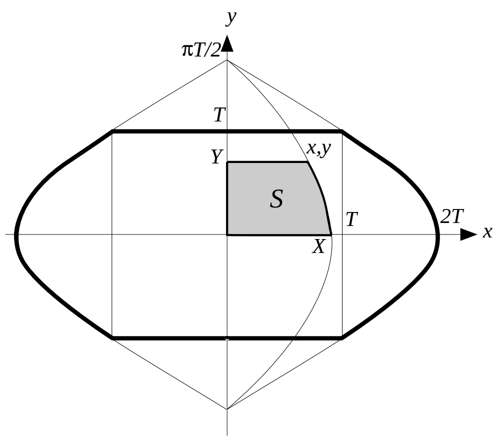
Uma Projeção Cartográfica Equivalente

Carlos A. Furuti*
Projeto A_HAND
DCC—IMECC Unicamp

outubro de 1992
CRT-001—92-10-09-A

Uma *projeção cartográfica* é um mapeamento da esfera (o globo terrestre idealizado) no plano. Uma projeção *equivalente* preserva as relações entre as áreas, enquanto pode modificar distâncias e, por conseguinte, as formas. Propõe-se aqui uma projeção equivalente que lembra as criadas por Eckert (pólos transformados em segmentos com a metade do Equador) [RS69].

A projeção transforma os paralelos em segmentos irregularmente espaçados e os meridianos em senóides truncadas. Uma forma conveniente de descrevê-la é calcular as coordenadas cartesianas x, y de um ponto de latitude Φ e longitude $\lambda, -\pi/2 \leq \Phi \leq \pi/2, -\pi \leq \lambda \leq \pi$ na esfera de raio $R > 0$.



Seja $S(X, Y)$ a área da região limitada por $0 \leq y \leq Y$ e $0 \leq x \leq f(y) = X\cos(Ay)$. O período dessa função é $2T\pi, T > 0 \Rightarrow A = 2\pi/2T\pi$ portanto $x = X\cos(y/T)$.

$$S(X,Y) = \int_0^Y f(y)dy = \int_0^Y X\cos\frac{y}{T}dy$$

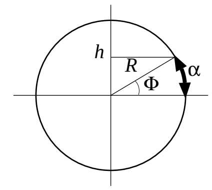
fazendo $a = y/T, Tda = dy, 0 \leq y \leq Y, 0 \leq aT \leq Y, 0 \leq a \leq Y/T$

$$S(x,y) = X\int_0^{\frac{Y}{T}} \cos aT da = XT(\sin a\,]_0^{\frac{Y}{T}}\ ) = XT\sin\frac{Y}{T}$$

e $S(2T, T)$ equivale a 1/4 da área da esfera $S_e = 4\pi R^2$:

$$S(2T,T) = 2T^2\sin 1 = \pi R^2 \Rightarrow T = R\sqrt{\frac{\pi}{2\sin 1}} \tag{1}$$

Se o paralelo Φ é projetado em $y = Y, S(2T, Y)$ equivale à metade da área limitada pelos paralelos 0 e Φ (isto é, a área S_z da zona esférica gerada pela rotação do arco α):



*O autor é responsável pelos programas *SG* (cálculo do exemplo de planisfério) e *Stardust* (demais diagramas e pós-edição do planisfério)

$$S_z/2 = 2\pi Rh/2 = \pi RR \sin\Phi = \pi R^2 \sin\Phi = S(2T, Y) = 2T^2 \sin(Y/T)$$

$$\sin\frac{Y}{T} = \frac{\pi R^2 \sin\Phi}{2T^2} = \frac{\pi R^2 \sin\Phi 2 \sin 1}{2R^2\pi} \Rightarrow Y = T \arcsin(\sin\Phi \sin 1) \qquad (2)$$

O meridiano λ é projetado em $x = X\cos(y/T)$, assim $S(X,T)$ equivale à metade da área entre os meridianos 0 e λ, que é metade da área do fuso esférico S_f com ângulo λ:

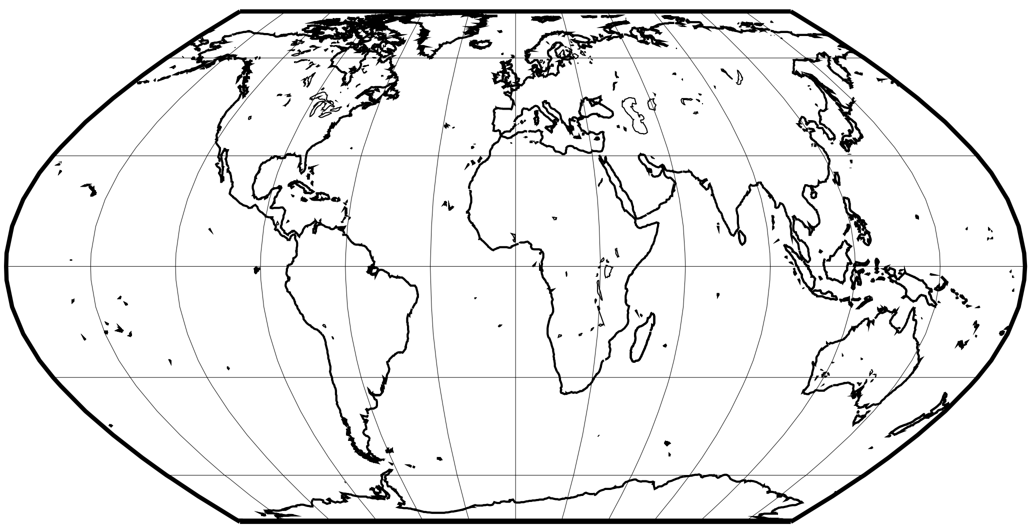
$$\frac{S_f}{S_e} = \frac{\lambda}{2\pi} \Rightarrow S_f = \frac{\lambda 4\pi R^2}{2\pi}, S(X,T) = XT \sin\frac{T}{T} = \lambda R^2$$

De (1) calculamos x:

$$X = \frac{\lambda R^2}{T\sin 1} = \frac{\lambda}{T\sin 1}\frac{T^2}{\frac{\pi}{2\sin 1}} = \frac{2\lambda T}{\pi} \Rightarrow x = \frac{2\lambda T}{\pi}\cos\frac{y}{T} \qquad (3)$$

De (2) e (3):

$$\boxed{\begin{array}{lll} s_1 = \sin 1 & t = \arcsin(s_1 \sin\Phi) & \qquad t_1 = s_1 \sin\Phi \\ T = R\sqrt{\frac{\pi}{2s_1}} & x = z\lambda\cos t & \text{ou} \quad x = z\lambda\sqrt{1 - {t_1}^2} \\ z = 2T/\pi & y = Tt & \qquad y = T\arcsin t_1 \end{array}}$$



A projeção é equivalente sem apresentar excessiva curvatura nas latitudes temperadas. Todos os paralelos e meridianos em múltiplos de $\pi/6$.

Referências

[RS69] Robinson, Arthur H., Sale, Randall D. *Elements of Cartography*, John Wiley & Sons, Inc., 1969